МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Н.Р. Стронгина

КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

Численное интегрирование и анализ погрешности

(Модуль 12.4)

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2021

УДК 519.6
ББК 22.19
С-86

С-86 Стронгина Н.Р. Курс «Численные методы»: Численное интегрирование и анализ погрешности (Модуль 12.4): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 55 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.А. Перов**

Пособие является компонентом учебно-методического комплекса по дисциплине «Численные методы». В нем показан способ построения квадратурных формул на основе полиномиальной интерполяции. На примере простой и составной формул 2-го порядка (порядок погрешности 5) проведен анализ погрешности с учетом погрешности данных. Рассмотрены и обоснованы способ приближенного вычисления интеграла с заданной точностью; возможность контроля погрешности при сгущении сетки и метод снижения трудоемкости вычислений за счет неравномерного динамического расположения узлов. Приведен пошаговый разбор решения задач.

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», а также для преподавателей.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
Института информационных технологий, математики и механики ННГУ
к.ф.-м.н., доцент А.В. Грезина

УДК 519.6
ББК 22.19

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники и последующее развитие высокопроизводительных вычислительных систем открывают качественно новые возможности изучения сложных реальных объектов методами вычислительного эксперимента [11, 12].

Машинный вычислительный эксперимент как новый метод научного исследования предполагает дискретизацию исходной задачи. Он требует специальной проработки численного алгоритма: корректность, устойчивость, точность, сходимость. Поэтому на современном этапе подготовки выпускников по направлению «Прикладная математика и информатика» основной целью освоения дисциплины «Численные методы» является изучение фундаментальных принципов построения численных алгоритмов, подходов к анализу их свойств, подготовка студентов к разработке и применению эффективных вычислительных комплексов, необходимых для математического моделирования сложных систем.

В Институте информационных технологий, математики и механики ННГУ в системе подготовки бакалавров по указанному выше направлению дисциплина «Численные методы» изучается на 3-м курсе в течение двух семестров. Обучение включает лекции, практические и лабораторные занятия, самостоятельную работу, зачеты и экзамен. Содержание дисциплины соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов и обновляется с учетом проблематики научных исследований и технологий программирования. Фундаментальные основы курса соответствует требованиям типовой программы по направлению «Прикладная математика и информатика», разработанной под руководством академика РАН А.А. Самарского [13].

Курс содержит изучение основ машинной арифметики, анализ структуры погрешности, подходы и методы приближенного вычисления функций, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение систем линейных алгебраических уравнений, задач на собственные значения, решение нелинейных алгебраических уравнений и систем. Особое внимание уделяется инструментам математического моделирования сложных систем: методам численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), решению уравнений в частных производных, а также структуре соответствующих вычислительных комплексов.

В связи с успешным применением в ННГУ практико-ориентированного подхода и на основе принципа «образование как исследование», вытекающего из положения Гумбольдта «образование на основе исследований» [11], фундаментальный курс «Численные методы» имеет в ННГУ уровневую структуру. С одной стороны, в нем представлены все основные разделы численного анализа. С другой стороны, актуальные приложения требуют одновременного использования разных методов. Поэтому основой курса является системное изучение модельных задач, описывающих свойства реальных объектов различной природы. Освоение разделов дисциплины построено таким образом, чтобы в течение каждого семестра студенты могли самостоятельно подготовить программную реализацию численного алгоритма для решения модельной задачи, провести вычислительный эксперимент и подготовить отчет.

Нижегородский государственный университет является участником Суперкомпьютерного консорциума университетов России [12]. Студентов 3-го курса, изучающих дисциплину «Численные методы», знакомят с подходами к организации параллельных вычислений. Глубокое изучение этих подходов опирается на тот же комплект модельных задач, но проводится на старших курсах после освоения дисциплин, посвященных технологиям и методам параллельного программирования.

При освоении курса «Численные методы» у студентов 3-го курса должны быть сформированы компетенции разработки и применения программных средств разного уровня сложности. Поэтому требования к программам, подготовленным студентами, также реализуют практико-ориентированный подход. Программа должна быть написана на алгоритмическом языке высокого уровня. Код, реализующий алгоритм, должен быть подготовлен студентом самостоятельно. Объектно-ориентированный подход приветствуется. Программа и способ работы с ней должны быть пригодны не только для выполнения конкретного расчета, но также для проверки корректной реализации метода и результатов вычислительного эксперимента, и затем для изучения свойств метода и свойств моделируемого объекта. Ряд заданий выполняются с помощью специальной программы-тренажера, затем – с помощью программы, подготовленной студентом.

Требования самостоятельной программной реализации алгоритма и последующего самостоятельного проведения вычислительного эксперимента предполагают, что при рассмотрении теоретического материала, проведении практических занятий, выполнении заданий в рамках самостоятельной работы необходимо уделить больше внимания анализу понятийного аппарата дисциплины, доказательной базе, рассмотрению «простых» примеров и разбору по шагам решений специально подобранных задач. Решение именно этой учебной задачи поддерживает предлагаемое пособие.

Изучение тематического модуля, представленного в пособии, опирается на дисциплины «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Геометрия и алгебра» и «Программирование на ЭВМ» и осуществляется одновременно с изучением дисциплин «Уравнения математической физики» и «Функциональный анализ».

Нумерация разделов пособия соответствует установленной в настоящее время нумерации тематических модулей электронного учебного курса «Численные методы», представленного в системе электронного обучения ННГУ (СЭО ННГУ) на базе платформы Moodle. В период весеннего семестра 2019-20 учебного года и осеннего семестра 2020-21 учебного года дистанционная организация учебного процесса по дисциплине «Численные методы» выстраивалась на базе этого электронного курса [14].

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих курс «Численные методы», и преподавателей.

Материал пособия может быть полезен студентам, изучающим в вузе численные методы на различных направлениях подготовки, а также студентам магистратуры ИИТММ, изучающим параллельные численные методы на основе технологий параллельного программирования.

Модуль 12.4. Численное интегрирование и анализ погрешности

Квадратурные формулы интерполяционного типа, общий способ получения, порядок, точность, порядок погрешности, виды погрешности. Формулы Ньютона-Котеса, примеры. Формула Симпсона, анализ погрешности. Составная формула Симпсона, анализ погрешности. Интегрирование с заданной точностью. Оценка погрешности интегрирования по правилу Рунге. Метод адаптивной квадратуры (опция). Квадратурные формулы наивысшей точности (Гаусса)

12.4.1. Построение квадратурных формул – общий подход

Рассмотрим задачу о вычислении интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (12.1)$$

С целью численного решения задачи (12.1) используем значения функции $f(x)$ в узлах сетки $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и полином $P_n(x)$ степени не выше n, интерполирующий $f(x)$ в указанных узлах: $P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,\ldots n.$

Узлы, выбранные для построения интерполяционного полинома, могут попадать или не попадать на отрезок интегрирования.

Граничные узлы интерполяции могут совпадать или не совпадать с границами отрезка интегрирования.

Сетка, образованная узлами интерполяции, может быть равномерной или неравномерной.

Полагая, что на отрезке интегрирования $[a,b]$

функция $f(x)$ **примерно «равна»**

своему интерполяционному полиному $P_n(x)$ **степени не выше** n

$$f(x) \sim P_n(x) \qquad (12.2)$$

«заменяем» интеграл от функции

интегралом интерполяционного полинома:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b P_n(x)\,dx \qquad (12.3)$$

Чтобы решить поставленную задачу

1) Запишем полином $P_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x) f_i \qquad (12.4)$$

где $L_{ni}(x), i=0,...n$ – полиномы Лагранжа и $f_i = f(x_i), i=0,...n$ - значения функции в узлах интерполяции.

2) Проинтегрируем $P_n(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} L_{ni}(x) \cdot f_i \right) dx = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \left(\int_a^b L_{ni}(x)dx \right) \qquad (12.5)$$

3) Введем обозначения

$$c_i = \int_a^b L_{ni}(x)dx, i=0,...n \qquad (12.6)$$

Это коэффициенты, значения которых зависят от отрезка интегрирования $[a,b]$ и расположения узлов сетки $x_0 < x_1 < ... < x_n$, и не зависят от функции $f(x)$.

4) Запишем результат (12.5) с помощью обозначений (12.6)

$$\int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i \qquad (12.7)$$

5) Результат интегрирования полинома обозначим символом I_n

$$I_n = \int_a^b P_n(x)\, dx \qquad (12.8)$$

Квадратурной формулой интерполяционного типа для решения задачи (12.1) на сетке $x_0 < x_1 < ... < x_n$ называют формулу вида

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i \qquad (12.9)$$

где коэффициенты $c_i, i=0,...n$ определены по формулам (12.6), а значения $f_i = f(x_i), i=0,...n$ есть значения функции $f(x)$ в узлах интерполяции.

Квадратурная формула I_n служит для приближенного вычисления I:

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_n = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i \qquad (12.10)$$

Формула I_n заменяет вычисление интеграла I вычислением некоторой линейной комбинации значений функции в узлах сетки.

Погрешность квадратурной формулы

Определение 1. Погрешностью квадратурной формулы I_n называют разность истинного значения интеграла I и значения I_n, соответствующего формуле:

$$\psi_n = I - I_n \tag{12.11}$$

Для погрешности квадратурной формулы справедливо следующее представление.

Утверждение 1. Если на отрезке «задания и применения интерполяционного полинома» функция $f(x)$ является достаточно гладкой, для погрешности ψ_n верно

$$\psi_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x))\ \omega(x)\ dx \tag{12.12}$$

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$,

$\xi(x) \in [\min[a, x_0], \max[b, x_n]]$.

Доказательство

Погрешность ψ_n запишем по определению (12.11), увидим ее связь с погрешностью интерполяции $r_n(x)$ и применим Теорему о погрешности интерполяции (модуль 12.2):

$$\psi_n = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b (f(x) - P_n(x))dx = \int_a^b r_n(x)dx =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x))\ \omega(x)\ dx$$

Здесь $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$, $\xi(x) \in [\min[a, x_0], \max[b, x_n]]$.

Порядок формулы, точность формулы, порядок погрешности формулы, виды погрешности

Квадратурную формулу характеризуют:

n	**порядок формулы**, то есть степень соответствующего ей интерполяционного полинома;
p	**точность формулы**, то есть максимально возможная степень полиномов, для которых формула дает точный результат (нулевую погрешность ψ_n); очевидно, что $p \geq n$.
k	**порядок малости погрешности**, см. примеры далее.

При изучении погрешности различают

ψ_n	погрешность квадратурной формулы (погрешность интегрирования)
$В\Pi_n$	вычислительную погрешность интегрирования
$О\Pi_n$	общую погрешность квадратурной формулы (общую погрешность интегрирования)

12.4.2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Определение 2. Квадратурную формулу вида (12.9) для вычисления интеграла (12.1) называют квадратурной формулой Ньютона-Котеса порядка n, если начальный и последний узлы интерполяции совпадают с границами отрезка интегрирования: $x_0 = a, x_n = b$ и сетка $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ является равномерной

$$x_i = a + ih,\ i = 0,\ldots n,\ h = \frac{b-a}{n}$$

При построении формул Ньютона-Котеса порядка n функцию $f(x)$ (как и в общем случае) заменяют на отрезке интегрирования $[a,b]$ ее интерполяционным полиномом $P_n(x)$ степени не выше n.

Утверждение 2. Если на отрезке интегрирования $[a,b]$ функция $f(x)$ является достаточно гладкой, погрешность квадратурной формулы Ньютона-Котеса порядка n в зависимости от четной или нечетной степени интерполяционного полинома $P_n(x)$ имеет вид

$$\psi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \int\limits_a^b (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)dx, & n = 2N-1 \\ \dfrac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) \int\limits_a^b x(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)dx, & n = 2N \end{cases} \quad (12.13)$$

При нечетных n точность формулы p равна ее порядку: $p = n$, а при четных n точность формулы p выше ее порядка: $p = n+1$.

Пример 1

Формула Ньютона-Котеса порядка $n=1$ называется **формулой трапеций**. Формула имеет вид

$$I_1 = \int\limits_a^b P_1(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) \quad (12.14)$$

где $h = b - a$ называется «шагом формулы трапеций».

При построении данной квадратурной формулы полином $P_1(x)$ интерполирует $f(x)$ на сетке

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h.$$

При этом $b = a + h$.

Пример 2

Формула Ньютона-Котеса порядка $n=2$ называется **формулой Симпсона**. Формула имеет вид

$$I_2 = \int\limits_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(a+h) + f(b)\big) \quad (12.15)$$

где $h = \dfrac{b-a}{2}$ называется «шагом формулы Симпсона».

При построении данной квадратурной формулы полином $P_2(x)$ интерполирует $f(x)$ на сетке

$x_0 = a,\ x_1 = a + h, x_2 = a + 2h.$

При этом $b = a + 2h$.

Пример 3

Формула Ньютона Котеса порядка $n = 3$ называется **«правилом $3/8$»**.

$$I_3 = \int_a^b P_3(x)dx = \frac{3h}{8}\big(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\big) \qquad (12.16)$$

где $h = \dfrac{b-a}{3}$ называется «шагом правила $3/8$».

При построении данной квадратурной формулы полином $P_3(x)$ интерполирует $f(x)$ на сетке

$x_0 = a,\ x_1 = a + h, x_2 = a + 2h,\ x_3 = a + 3h.$

При этом $b = a + 3h$.

Запись формул в каноническом виде

Формула трапеций как частный случай формулы (12.9) имеет вид

$I_1 = c_0 \cdot f_0 + c_1 \cdot f_1$

где $c_0 = c_1 = \dfrac{h}{2}$, $f_0 = f(x_0) = f(a)$, $f_1 = f(x_1) = f(b)$.

Формула Симпсона как частный случай квадратурной формулы (12.9) имеет вид

$I_2 = c_0 \cdot f_0 + c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2$

где $c_0 = c_2 = \dfrac{h}{3}, c_1 = \dfrac{4h}{3}$, $f_0 = f(x_0) = f(a)$, $f_1 = f(x_1) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$,
$f_2 = f(x_2) = f(b)$

Правило $3/8$ как частный случай квадратурной формулы (12.9) имеет вид

$I_3 = c_0 \cdot f_0 + c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + c_3 \cdot f_3$

где $c_0 = c_3 = \frac{3h}{8}, c_1 = c_2 = \frac{9h}{8}$, $f_0 = f(x_0) = f(a)$,

$$f_1 = f(x_1) = f\left(\frac{2a+b}{3}\right),\ f_2 = f(x_2) = f\left(\frac{a+2b}{3}\right),\ f_3 = f(x_3) = f(b)$$

При $n \le 8$ нужную формулу можно найти в справочнике. При $n > 8$ формулы, как правило, не используются: их коэффициенты велики по модулю и различны по знаку, что приводит к росту вычислительной погрешности.

12.4.3. Квадратурная формула Симпсона I_2

Квадратурная формула Симпсона I_2 используется для приближенного вычисления интеграла (12.1) на основе интерполяционного полинома $P_2(x)$ степени не выше 2

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_2$$

Формула имеет вид

$$I_2 = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \qquad (12.17)$$

где $h = \frac{b-a}{2}$ есть «шаг формулы Симпсона».

Обоснование формулы I_2

Полагая $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a,b]$ примерно «равной» своему интерполяционному полиному $P_2(x)$ степени не выше 2 (это парабола)

$$f(x) \sim P_2(x)$$

«заменяем» интеграл от функции интегралом от параболы:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b P_2(x)\,dx$$

Узлы интерполяции имеют вид

$$x_0 = a,\ \ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h.$$

где $h = \frac{b-a}{2}$ есть «шаг формулы Симпсона», такой, что $b = a + 2h$.

В узлах интерполяции полином $P_2(x)$ должен соответствовать требованиям

$$P_2(x_0) = f(a),$$

$$P_2(x_1) = f(a+h) = f(\frac{a+b}{2}),$$

$$P_2(x_2) = f(a+2h) = f(b).$$

Записывая $P_2(x)$ в форме Лагранжа, вычисляем интеграл:

$$\int_a^b P_2(x)dx =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{(x-x_1)(x-b)}{(a-x_1)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_1-a)(x_1-b)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-a)}{(b-x_1)(b-a)} f(b) \right) dx =$$
$$= \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right)$$

Результат интегрирования полинома $P_2(x)$ обозначим через I_2

$$I_2 = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Значение искомого интеграла полагаем «равным» значению формулы:

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_2$$

Погрешность формулы I_2

Определение 3. Погрешностью квадратурной формулы Симпсона называют разность истинного значения интеграла I и значения I_2, соответствующего формуле:

$$\psi_2 = I - I_2 \qquad (12.18)$$

Утверждение 3. Если на отрезке интегрирования $[a,b]$ функция $f(x)$ четыре раза непрерывно-дифференцируема, для погрешности квадратурной формулы Симпсона верно представление

$$\psi_2 = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi) \qquad (12.19)$$

где ξ есть неизвестная средняя точка на отрезке интегрирования: $\xi \in [a,b]$.

Для погрешности формулы Симпсона верна оценка

$$|\psi_2| \le \hat{M} h^5, \qquad (12.20)$$

где $\hat{M} = \frac{1}{90} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$,

$h = \frac{b-a}{2}$ есть шаг формулы Симпсона,

Доказательство

На основании Утверждения 2 в случае $n = 2$ запишем

$$\psi_2 = \frac{1}{4!} f^{IV}(\xi) \int_a^b x\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx =$$

$$= \frac{1}{4!} f^{IV}(\xi) \int_a^b x\,(x - a)(x - \left(\frac{a+b}{2}\right))(x - b)dx = \ldots = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)$$

Порядок формулы I_2

Формула имеет порядок 2, так как построена на основе интерполяционного полинома степени не выше 2 по трем узлам интерполяции (на это указывает индекс 2 в обозначении I_2).

Точность формулы I_2

Так как погрешность ψ_2 определяется четвертой производной подынтегральной функции $f(x)$, результат численного интегрирования будет точным для всех $f(x)$, которые являются полиномами от нулевой до третьей степени включительно (для указанных полиномов четвертая производная и соответственно погрешность ψ_2 обращаются в ноль).

Точность формулы Симпсона равна 3.

Порядок погрешности формулы I_2

Порядок погрешности формулы Симпсона используется для оценки погрешности численного интегрирования на базе **составных квадратурных формул** по результатам, полученным на «обычной» и «удвоенной» сетке (см. раздел «Оценка погрешности интегрирования по правилу Рунге», модуль 12.4)

Рассмотрим **подход к исследованию порядка погрешности** и покажем, что **для формулы Симпсона порядок погрешности равен 5 .**

Чтобы изучить порядок погрешности, рассмотрим модельную ситуацию:

$$I = \int_a^{a+2h} f(x)dx \text{ при } h \to 0,$$

то есть a фиксировано, b стремится к a .

Погрешность квадратурной формулы Симпсона записывается в виде

$$\psi_2 = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in [a, a + 2h]$ и для каждого значения h формула (12.19) содержит «свое» значение неизвестной средней точки ξ .

Чтобы выделить главный член погрешности, запишем четвертую производную, взятую в средней точке, по формуле Тейлора в неизменной (фиксированной) точке a:

$$f^{IV}(\xi) = f^{IV}(a) + f^{V}(\eta)(\xi - a),$$

где $\eta \in [a, \xi]$ - новая средняя точка.

В предположении, что пятая производная на отрезке $[a, a+2h]$ ограничена, учитывая, что $|\xi - a| \le |b - a| = 2h$, запишем

$$f^{IV}(\xi) = f^{IV}(a) + O(h).$$

Результат

1) Если на отрезке $[a, a+2h]$ функция $f(x)$ является достаточно гладкой, погрешность формулы Симпсона представима в виде

$$\psi_2 = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(a) + o(h^5)$$

2) Если $f^{IV}(a) \ne 0$, главный член погрешности формулы Симпсона имеет вид

$$-\frac{h^5}{90} f^{IV}(a)$$

и порядок погрешности есть $k = 5$.

Комментарии

При уменьшении шага формулы Симпсона в 10 раз (соответственно при уменьшении длины участка интегрирования в 10 раз) погрешность формулы уменьшается в 100 000 раз.

Для изучения порядка погрешности могли быть также рассмотрены:

$I = \int\limits_{b-2h}^{b} f(x)dx$, значение b фиксировано, $h \to 0$

$I = \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)dx$, значение x_1 фиксировано, $h \to 0$

Вычислительная погрешность формулы I_2

Определение 4. Вычислительной погрешностью интегрирования по формуле Симпсона называют разность значения I_2, соответствующего формуле Симпсона, и значения $\tilde{I}_2$, полученного по формуле Симпсона:

$$В\Pi_2 = I_2 - \tilde{I}_2 \tag{12.21}$$

В общем случае источниками вычислительной погрешности любой квадратурной формулы вида (12.9) могут быть:

1) неточное задание узлов интерполяции $x_i, i = 0,...n$, используемых при вычислении коэффициентов (12.6), и неточное задание границ отрезка $[a,b]$;

2) неточный подсчет коэффициентов (12.6) и погрешности выполнения арифметических операций при вычислении выражения (12.9);

3) неточное задание функции $f(x)$ в узлах интерполяции.

В связи с тем, что неточность задания функции присутствует практически всегда и во многих случаях ее влияние превосходит влияние остальных источников, рассмотрим «модельную ситуацию», аналогичную рассмотренной в модуле п. 12.2, и сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 4. Если коэффициенты квадратурной формулы Симпсона, а именно

$$c_0 = c_2 = \frac{h}{3};\, c_1 = \frac{4h}{3}$$

заданы точно и при вычислении выражения (12.17) погрешность выполнения арифметических операций отсутствует,

тогда вычислительная погрешность интегрирования по формуле Симпсона зависит от ошибок задания функции в узлах интерполяции

$$B\Pi_2 = \frac{h}{3}(\delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2) \tag{12.22}$$

и оценивается величиной

$$|\, B\Pi_2 \,| \le \delta \cdot (b-a) \tag{12.23}$$

Здесь $\delta_i = f_i - \tilde{f}_i, i = 0, 1, 2$ – ошибки (погрешности) задания функции в узлах интерполяции и число $\delta > 0$ есть оценка этих ошибок:

$$|\, \delta_i \,| \le \delta, i = 0, 1, 2\,. \tag{12.24}$$

Доказательство

Значение, соответствующее формуле Симпсона, составит

$$I_2 = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)$$

Значение, полученное по формуле Симпсона, составит

$$\tilde{I}_2 = \frac{h}{3}\left(\tilde{f}_0 + 4\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2\right)$$

Вычислительная погрешность интегрирования в соответствии с (12.21) записывается следующим образом:

$$ВП_2 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h}{3}(\tilde{f}_0 + 4\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) = \frac{h}{3}(\delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2)$$

С учетом (12.24) и предположений об отсутствии иных источников вычислительной погрешности записываем оценку

$$|\ ВП_2\ | \le \delta \frac{h}{3}(1+4+1) = 2\ \delta\ h$$

Так как шаг формулы Симпсона есть $h = \dfrac{b-a}{2}$, получаем

$$|\ ВП_2\ | \le \delta \cdot (b-a)$$

Комментарий

Из (12.23) следует вычислительная устойчивость численного интегрирования: если $h \to 0$ (то есть $b \to a$) $ВП_2 \to 0$.

Общая погрешность формулы I_2

Определение 5. Общей погрешностью интегрирования по формуле Симпсона называют разность истинного значения интеграла I и значения $\tilde{I}_2$, полученного по формуле:

$$ОП_2 = I - \tilde{I}_2 \tag{12.25}$$

Прибавляя и вычитая «истинное» значение квадратурной формулы I_2, получим

$$ОП_2 = \underbrace{I - \tilde{I}_2}_{\substack{\textit{общая}\\ \textit{погрешность}\\ \textit{интегрирования}}} = \underbrace{I - I_2}_{\substack{\textit{погрешность}\\ \textit{формулы}\\ \textit{Симпсона}}} + \underbrace{I_2 - \tilde{I}_2}_{\substack{\textit{вычислительная}\\ \textit{погрешность}\\ \textit{интегрирования}}}$$

Вытекает результат:

Утверждение 5. Общая погрешность интегрирования по формуле Симпсона равна сумме погрешности квадратурной формулы и вычислительной погрешности интегрирования

$$ОП_2 = \psi_2 + ВП_2 \tag{12.26}$$

Для нее справедлива оценка

$$\left|\ ОП_2\ \right| \le \left|\ \psi_2\ \right| + \left|\ ВП_2\ \right|. \tag{12.27}$$

При выполнении предположений о гладкости функции $f(x)$ на отрезке интегрирования (см. Утверждение 3) и об источниках вычислительной погрешности (см. Утверждение 4) оценка общей погрешности интегрирования по формуле Симпсона принимает вид

$$\left|\ ОП_2\ \right| \le \hat{M}h^5 + \delta(b-a) \tag{12.28}$$

где $\hat{M} = \dfrac{1}{90} \max\limits_{x \in [a, b]} \left| f^{IV}(x) \right|$;

$h = \dfrac{b - a}{2}$ есть шаг формулы Симпсона,

число $\delta > 0$ есть оценка ошибок задания подынтегральной функции в узлах сетки:

$|\delta_i| \le \delta, i = 0, 1, 2$, где $\delta_i = f_i - \tilde{f}_i, i = 0, 1, 2$

Комментарий

Из (12.28) следует еще один аспект вычислительной устойчивости квадратурных формул: если $h \to 0$ (то есть $b \to a$) $OП_2 \to 0$.

12.4.4. Составная квадратурная формула Симпсона $I_{2,m}$

Задачи вычисления интегралов с высокой точностью на отрезках интегрирования большой длины приводят к необходимости применения составных формул, схем контроля погрешности и построения неравномерных сеток.

Эти вопросы изложены в разделах о применении правила Рунге и метода адаптивной квадратуры, поэтому данный раздел начинается с описания составной формулы Симпсона на произвольной сетке.

Полный анализ погрешности получается более наглядным, если его провести на примере равномерной сетки. Потому вслед за описанием на произвольной сетке приведено описание формулы на сетке с участками равной длины.

Составная формула $I_{2,m}$ на произвольной сетке

Составная квадратурная формула Симпсона $I_{2,m}$ используется для приближенного вычисления интеграла I на основе **квадратурных формул** вида (12.17), которые применяются **на участках отрезка** $[a,b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_{2,m} \tag{12.30}$$

Обозначения:

$[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...m-1$ — разбиение отрезка $[a,b]$ на m участков,

$x_0 = a,\ x_m = b,\ x_0 < x_1 < ... < x_m$

Точки $x_i,\ i = 0,...m$ являются **основными узлами** составной формулы.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

запись искомого интеграла как суммы интегралов по участкам;

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \sim \frac{\hat{h}_i}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

квадратурная формула Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...m-1$;

$\hat{h}_i$ – «**шаг формулы Симпсона на участке** $[x_i, x_{i+1}]$», $\hat{h}_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$;

$x_{i+1/2}$ – **середина участка** $[x_i, x_{i+1}]$, то есть **дополнительный узел** формулы.

Составная квадратурная формула Симпсона $I_{2,m}$ на m участках имеет вид

$$I_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}_i}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}) \tag{12.31}$$

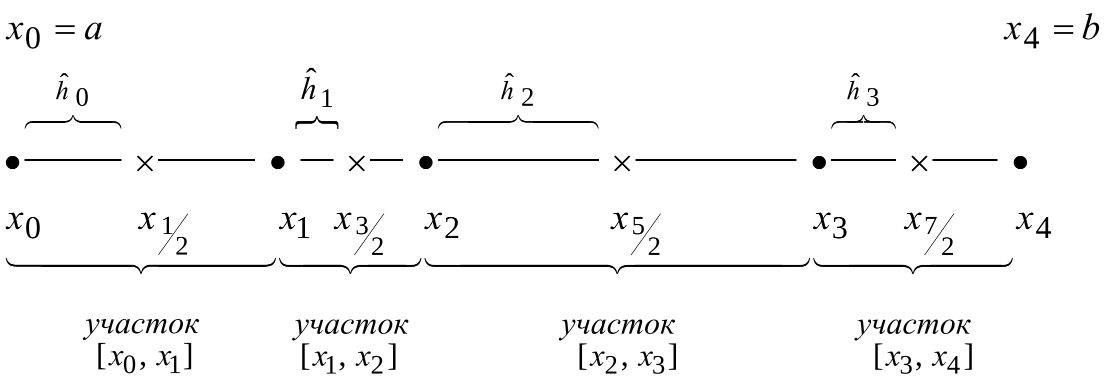
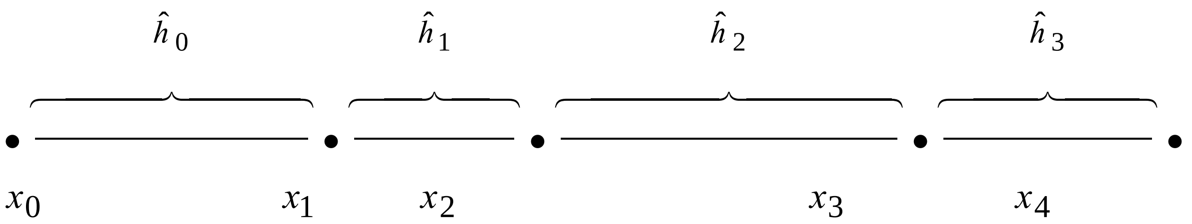


Рисунок 1

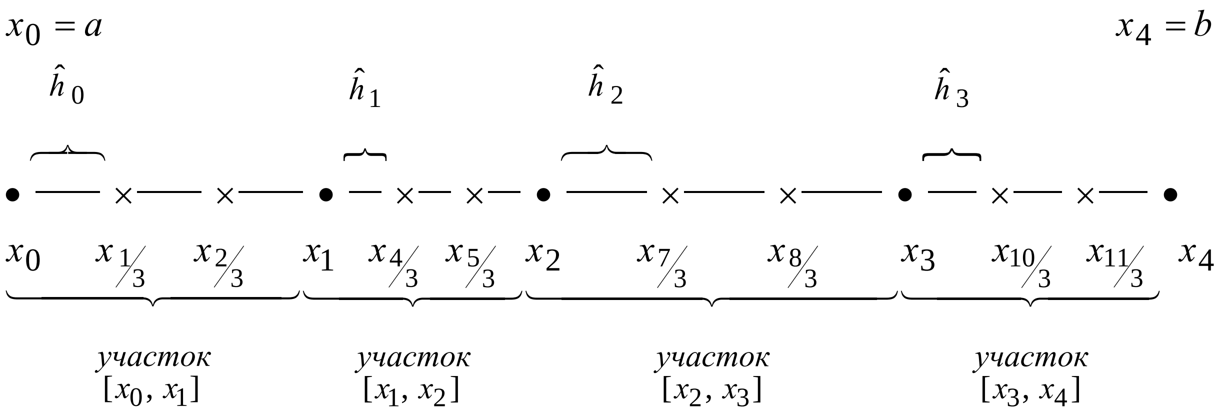
Пример неравномерной сетки для составной формулы Симпсона, $m = 4$

Комментарий

В обозначении $I_{2,\,m}$ индекс 2 указывает на порядок формулы Симпсона ($n = 2$), индекс m указывает на то, что формула Симпсона применяется на m участках отрезка $[a,b]$. Обозначение $I_{1,\,m}$ соответствует составной формуле трапеций, а обозначение $I_{3,\,m}$ – составной формуле «правила ⅜», когда они применяются на m участках отрезка $[a,b]$.



(А)



(Б)

Рисунок 2

Пример неравномерной сетки для составной формулы трапеций $m = 4$ (А) и составной формулы «Правило ⅜» $m = 4$ (Б)

Составная формула $I_{2,m}$ на равномерной сетке

Чтобы получить составную формулу $I_{2,m}$ на равномерной сетке, разбиваем отрезок $[a,b]$ на m **равных участков**. Длина каждого участка составляет

$$h = \frac{b-a}{m}.$$

Определим **основные узлы** составной формулы:

$$x_i = a + ih, i = 0,...m,$$

где h (длина участка) выступает как **«шаг составной формулы».**

Искомый интеграл есть сумма интегралов, взятых по участкам:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Чтобы на каждом из участков применить формулу Симпсона, нужны **дополнительные узлы**. Они должны быть расположены посередине каждого из участков:

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}, \ i = 0,...m-1$$

Для надежности вычислений дополнительные узлы часто записывают в виде

$$x_{i+1/2} = a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h, \ i = 0,...m-1.$$

Запишем формулу Симпсона для вычисления интеграла на участке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \sim \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}) \qquad (12.32)$$

Обозначение $\hat{h}$ есть **«шаг формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$»**.

Длина отрезка интегрирования, число участков, шаг составной формулы и шаг формулы на участке связаны соотношениями

$$\hat{h} = \frac{h}{2} = \frac{b-a}{2m}. \qquad (12.33)$$

(Попытка сократить число показателей, характеризующих сетку задачи, приводит к ошибкам в интерпретации справочной информации, отладке программ и реализации адаптивных алгоритмов).

Чтобы вычислить искомый интеграл, суммируем формулы (12.32):

$$\int_a^b f(x)dx \sim \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}) \qquad (12.34)$$

Составной квадратурной формулой Симпсона $I_{2,m}$ на равномерной сетке называем формулу

$$I_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}) \tag{12.35}$$

где $\hat{h}$ – «шаг формулы Симпсона», одинаковый для всех участков:

$\hat{h} = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2} = const$, **то есть** $\hat{h} = \dfrac{b-a}{2m}$

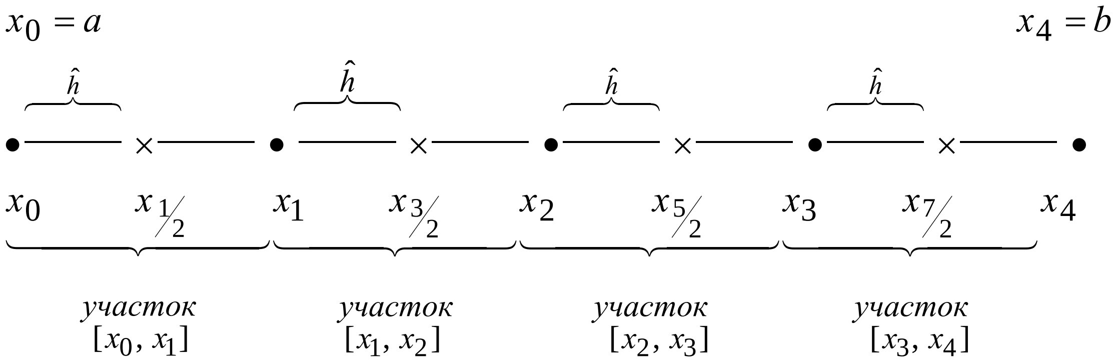


Рисунок 3

Пример равномерной сетки для составной формулы Симпсона, $m = 4$

Комментарий

При подготовке программной реализации метода на равномерной сетке часто используют запись следующего вида:

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{b-a}{6m}(f_0 + 4f_{1/2} + 2f_1 + 4f_{3/2} + 2f_2 + \ldots + 2f_{m-1} + 4f_{m-1/2} + f_m)$$

Погрешность составной формулы $I_{2,m}$

Определение 6. Погрешностью составной формулы Симпсона называют разность истинного значения интеграла I и значения $I_{2,m}$, соответствующего составной формуле:

$$\psi_{2,m} = I - I_{2,m} \tag{12.36}$$

Сформулируем результат для равномерной сетки.

Утверждение 6. Если на отрезке интегрирования $[a,b]$ функция $f(x)$ четыре раза непрерывно-дифференцируема, для **погрешности составной квадратурной формулы Симпсона $I_{2,m}$ на равномерной сетке** верно представление

$$\psi_{2,m} = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2m}\right)^5 \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV}(\xi_i) \qquad (12.37)$$

где ξ_i есть неизвестные средние точки, расположенные на участках $[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,\ldots m-1$.

Для **погрешности** верна оценка

$$|\,\psi_{2,m}\,| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M} \qquad (12.38)$$

где $\hat{M} = \frac{1}{90} \cdot \max\limits_{x \in [a,\, b]} |\, f^{IV}(x)\,|$.

Комментарий

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является достаточно гладкой, погрешность составной формулы Симпсона на равномерной сетке при увеличении числа участков m убывает как

$$O\left(\frac{1}{m^4}\right).$$

В частности, при удвоении числа участков погрешность падает в 16 раз. Это высокий темп снижения погрешности.

Доказательство

Искомый интеграл I может быть записан как сумма интегралов, взятых по участкам отрезка интегрирования:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Интеграл по каждому из участков $[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,\ldots m-1$ вычисляется приближенно по формуле Симпсона:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \sim \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

Составная формула Симпсона суммирует полученные значения:

$$I_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

Поэтому разность значений $I - I_{2,m}$ должна быть записана **как разность** сумм:

$$I - I_{2,m} = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right) - \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}}{3} (f_i + 4 f_{i+1/2} + f_{i+1}) \right)$$

и переписана как **сумма** разностей:

$$I - I_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{\hat{h}}{3} (f_i + 4 f_{i+1/2} + f_{i+1}) \right)$$

Таким образом, **погрешность составной формулы**, то есть (по определению)

$$\psi_{2,m} = I - I_{2,m}$$

оказалась **суммой погрешностей базовых формул** по всем участкам отрезка интегрирования:

$$\psi_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \psi_2 [x_i, x_{i+1}]$$

Погрешность **каждой базовой формулы** (по Утверждению 3) составит

$$\psi_2 [x_i, x_{i+1}] = -\frac{1}{90} \hat{h}^5 \cdot f^{IV} (\xi_i) \tag{12.39}$$

где $\hat{h}$ есть «шаг формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$», то есть

$$\hat{h} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$$

а неизвестная средняя точка $\xi_\mathrm{i} \in [x_i, x_{i+1}]$.

Формулы (12.39) нужно просуммировать по участкам отрезка интегрирования, а величину $\hat{h}$ записать в соответствии с (12.33):

$$\hat{h} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} = \frac{b - a}{2m}.$$

Тогда **погрешность составной формулы** выражается формулой

$$\psi_{2,m} = -\frac{1}{90} \hat{h}^5 \cdot \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV} (\xi_i) \tag{12.40}$$

и затем

$$\psi_{2,m} = -\frac{1}{90} \left(\frac{b - a}{2m} \right)^5 \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV} (\xi_i) \tag{12.41}$$

где неизвестные средние точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,...m-1$.

Оценим модуль погрешности:

$$\left| \psi_{2,m} \right| \le \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2m}\right)^5 \sum_{i=0}^{m-1} | f^{IV}(\xi_i) | \qquad (12.42)$$

Так как сумма модулей не превосходит произведения количества слагаемых на максимальное по модулю слагаемое, а именно

$$\sum_{i=0}^{m-1} | f^{IV}(\xi_i) | \le m \cdot \max_{x \in [a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$$

неравенство (12.42) принимает вид (12.38).

Вычислительная погрешность интегрирования по формуле $I_{2,m}$

Определение 7. Вычислительной погрешностью интегрирования по составной формуле Симпсона называют разность значения $I_{2,m}$, **соответствующего** составной формуле Симпсона, и значения $\tilde{I}_{2,m}$, **полученного** по составной формуле Симпсона:

$$B\Pi_{2,m} = I_{2,m} - \tilde{I}_{2,m} \qquad (12.43)$$

Сформулируем и докажем результат для произвольной сетки.

Утверждение 7. Если шаги квадратурных формул, заданных на участках $[x_i, x_{i+1}], i = 0,...m-1$ составной формулы, а именно, числа

$$\hat{h}_i, i = 0,...m-1$$

заданы точно и при вычислении выражения (12.31) погрешность выполнения арифметических операций «исключена», тогда **вычислительная погрешность интегрирования** по составной квадратурной формуле Симпсона $I_{2,m}$ зависит от ошибок задания функции в основных и дополнительных узлах

$$B\Pi_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}_i}{3} \left(\delta_i + 4\delta_{i+1/2} + \delta_{i+1}\right) \qquad (12.44)$$

и для нее справедлива оценка

$$\left| B\Pi_{2,m} \right| \le \delta \cdot (b-a) \qquad (12.45)$$

Величины

$$\delta_i = f_i - \tilde{f}_i, i = 0,...m$$

$$\delta_{i+1/2} = f_{i+1/2} - \tilde{f}_{i+1/2}, i = 0,...m-1$$

представляют собой ошибки (погрешности) задания функции в узлах и число $\delta > 0$ есть оценка этих ошибок:

$$\left| \delta_i \right| \le \delta, i = 0, ...m,$$

$$\left| \delta_{i+1/2} \right| \le \delta, i = 0, ...m-1 \qquad (12.46)$$

Доказательство

Составной формуле Симпсона соответствует значение

$$I_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}_i}{3} (f_i + 4 f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

Вследствие погрешности задания или вычисления значений функции в основных и дополнительных узлах будет вычислено

$$\tilde{I}_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}_i}{3} (\tilde{f}_i + 4 \tilde{f}_{i+1/2} + \tilde{f}_{i+1})$$

Разность указанных значений составит

$$I_{2,m} - \tilde{I}_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}_i}{3} \cdot ((f_i - \tilde{f}_i) + 4(f_{i+1/2} - \tilde{f}_{i+1/2}) + (f_{i+1} - \tilde{f}_{i+1}))$$

что означает

$$В П_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}_i}{3} \cdot (\delta_i + 4\delta_{i+1/2} + \delta_{i+1})$$

Оценим модуль вычислительной погрешности:

$$\left| В П_{2,m} \right| \le \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{\hat{h}_i}{3} \right| \left| \delta_i + 4\delta_{i+1/2} + \delta_{i+1} \right|$$

$$\le \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{\hat{h}_i}{3} \right| \left(\left| \delta_i \right| + 4 \left| \delta_{i+1/2} \right| + \left| \delta_{i+1} \right| \right) \le \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{\hat{h}_i}{3} \right| \cdot 6 \cdot \delta$$

Так как $\hat{h}_i$ есть «шаг формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$», то есть $\hat{h}_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$,

получим

$$\left| В П_{2,m} \right| \le \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \cdot 2 \cdot \delta = \delta \cdot (b-a)$$

потому что сумма длин всех участков $[x_i, x_{i+1}], i = 0,...m-1$ равна длине отрезка интегрирования $[a, b]$.

Комментарий

При увеличении числа участков m вычислительная погрешность составной формулы Симпсона не возрастает: она ограничена.

Это означает, что при вычислении интегралов по составным формулам длины участков можно уменьшать, а число участков можно наращивать: ошибки, инициированные погрешностью исходных данных, не нарастают.

Общая погрешность интегрирования по составной формуле $I_{2,m}$

Определение 8. Общей погрешностью интегрирования по составной формуле Симпсона называют разность истинного значения интеграла I и значения $\tilde{I}_{2,m}$, полученного по формуле:

$$ОП_{2,m} = I - \tilde{I}_{2,m} \tag{12.47}$$

Прибавляя и вычитая «истинное» значение составной квадратурной формулы $I_{2,m}$, получим

$$ОП_2 = \underbrace{I - \tilde{I}_{2,m}}_{\substack{\text{общая}\\ \text{погрешность}\\ \text{интегрирования}}} = \underbrace{I - I_{2,m}}_{\substack{\text{погрешность}\\ \text{составной}\\ \text{формулы}\\ \text{Симпсона}}} + \underbrace{I_{2,m} - \tilde{I}_{2,m}}_{\substack{\text{вычислительная}\\ \text{погрешность}\\ \text{интегрирования}}}$$

Сформулируем общий результат для произвольной сетки и оценку – для равномерной.

Утверждение 8. **Общая погрешность интегрирования по составной квадратурной формуле Симпсона** $I_{2,m}$ равна сумме погрешности указанной формулы и вычислительной погрешности интегрирования

$$ОП_{2,m} = \psi_{2,m} + ВП_{2,m} \tag{12.48}$$

Оценка общей погрешности имеет вид

$$\left| ОП_{2,m} \right| \le \left| \psi_{2,m} \right| + \left| ВП_{2,m} \right|. \tag{12.49}$$

При выполнении предположений о гладкости функции $f(x)$ из **Утверждения 6** и об источниках вычислительной погрешности из **Утверждения 7 оценка общей погрешности интегрирования по формуле $I_{2,m}$ на равномерной сетке** принимает вид

$$\left| ОП_{2,m} \right| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M} + \delta(b-a) \tag{12.50}$$

где $\hat{M} = \frac{1}{90} \cdot \max\limits_{x \in [a,b]} | f^{IV}(x) |$.

Комментарий

При увеличении числа участков m погрешность составной формулы **на равномерной сетке** стремится к нулю, а вычислительная погрешность ограничена.

Используем это свойство и оценку (12.50) для решения задач о подборе числа участков, обеспечивающих вычисление интеграла с требуемой точностью.

П р и м е р

И н т е г р и р о в а н и е с з а д а н н о й т о ч н о с т ь ю н а р а в н о м е р н о й с е т к е

Поставлена задача вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

По условию задачи функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является достаточно гладкой, а значения $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ заданы с погрешностью, не превышающей число $\delta > 0$.

Нужно вычислить I с **общей погрешностью**, не превышающей заданное число $\varepsilon > 0$, используя **составную формулу Симпсона на равномерной сетке**, полагая, что основным источником вычислительной погрешности интегрирования являются ошибки вычисления функции.

Р е ш е н и е

Т е з и с 1

По составной формуле Симпсона с числом участков m в качестве приближенного значения I должно быть вычислено

$$I_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

где $\hat{h}$ есть «шаг формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$», а именно

$$\hat{h} = \frac{b-a}{2m}$$

В силу ошибок вычисления $f(x)$ будет вычислено значение

$$\tilde{I}_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}}{3}(\tilde{f}_i + 4\tilde{f}_{i+1/2} + \tilde{f}_{i+1})$$

В качестве приближенного значения I будет предложено

$$I \approx \tilde{I}_{2,m}$$

Т е з и с 2

Общей погрешностью интегрирования по составной формуле называют величину

$$О П_{2,m} = I - \tilde{I}_{2,m}$$

(разность истинного значения интеграла и того значения, которое получилось при попытке применить составную формулу)

По **Утверждению 8** общая погрешность оценивается неравенством (12.31):

$$\left| ОП_{2,m} \right| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M} + \delta(b-a)$$

где $\hat{M} = \frac{1}{90} \cdot \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{IV}(x)|$

Тезис 3

Чтобы использовать неравенство, нужно знать $\hat{M}$,

а для этого нужно **вычислить** (то есть получить формулу и взять максимум)

четвертую производную подынтегральной функции $f(x)$

или оценить максимум с помощью **конечных или разделенных разностей**.

Предположим, что получено $\hat{M}^*$, являющееся верхней оценкой $\hat{M}$:

$$\hat{M} = \frac{1}{90} \cdot \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{IV}(x)| \le \hat{M}^*$$

Тогда для общей погрешности верна оценка

$$\left| ОП_{2,m} \right| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M}^* + \delta(b-a)$$

Тезис 4

Чтобы выполнить требование

$$\left| ОП_{2,m} \right| \le \varepsilon$$

ставим условие

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M}^* + \delta(b-a) \le \varepsilon$$

Далее два варианта

Вариант I. Если отрезок интегрирования $[a,b]$ и (или) оценка погрешности исходных данных δ слишком велики и в силу этих обстоятельств

$\delta(b-a) \ge \varepsilon$,

то на основе имеющихся оценок **гарантировать вычисление I с общей погрешностью, не превышающей заданное число ε, невозможно.**

Вариант II. Если исходные данные достаточно точны и (или) отрезок интегрирования мал, то есть

$\delta(b-a) < \varepsilon$

определим положительный параметр $\varepsilon_I > 0$, **который будет использован для контроля всех остальных компонент погрешности**:

$$\varepsilon_I = \varepsilon - \delta(b-a)$$

Тезис 5

Параметром $\varepsilon_I > 0$ следует распорядиться следующим образом.

1) Если погрешность выполнения арифметических операций отсутствует (это гипотетический случай), ставим условие

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M}^* \le \varepsilon - \delta(b-a) = \varepsilon_I$$

Тогда m **– число участков составной формулы – должно соответствовать требованию**

$$m^4 \ge \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{\hat{M}^*}{\varepsilon_I}$$

то есть

$$m \ \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{32} \cdot \frac{\hat{M}^*}{\varepsilon_I}}$$

2) Если погрешность выполнения арифметических операций присутствует, вводится еще один параметр – число $\varepsilon_{II} > 0$.

При подборе m – количества участков составной формулы – ставится условие

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{m}\right)^4 \hat{M}^* \le \ \varepsilon - \delta(b-a) - \varepsilon_{II} \ = \ \varepsilon_I - \varepsilon_{II}$$

причем правая часть неравенства должна остаться положительной: $\varepsilon_I - \varepsilon_{II} > 0$.

Тогда

$$m \ \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{32} \cdot \frac{\hat{M}^*}{(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})}}$$

Таким образом, интеграл I **будет вычислен с общей погрешностью, не превышающей заданное число** $\varepsilon > 0$:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \tilde{I}_{2,m} \right| \ \le \ \varepsilon$$

Ответ

Вариант I. По условию задачи $\delta(b-a) \ge \varepsilon$

На основе имеющихся оценок гарантировать вычисление I с общей погрешностью, не превышающей заданное число ε, невозможно.

Уместно предложить в качестве ответа значение

$$I \approx \tilde{I}_{2,m}$$

где число участков подобрано так, чтобы погрешность замены интеграла на квадратурную формулу имела тот же порядок, что и оценка вычислительной погрешности, например

$$m \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{32} \cdot \frac{\hat{M}^*}{\delta(b-a)}}$$

то есть

$$m \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^4}{32} \cdot \frac{\hat{M}^*}{\delta}}$$

Нужно сообщить, что задача решена с (общей) погрешностью, не превышающей $2\varepsilon > 0$

Вариант II. По условию задачи $\delta(b-a) < \varepsilon$

В качестве ответа нужно предложить значение

$$I \approx \tilde{I}_{2,m}$$

где число участков соответствует требованию

$$m \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{32} \cdot \frac{\hat{M}^*}{(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})}}$$

то есть

$$m \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{32} \cdot \frac{\hat{M}^*}{(\varepsilon - \delta(b-a) - \varepsilon_{II})}}$$

Нужно сообщить, что задача решена с общей погрешностью, не превышающей $\varepsilon > 0$, при условии, что погрешность выполнения арифметических операций остается в пределах $\varepsilon_{II} > 0$.

Комментарии

1) **Решение задачи следует начинать с проверки:**

$\delta(b-a) < \varepsilon$ или $\delta(b-a) \geq \varepsilon$.

2) Способ решения не зависит от того, точно или грубо оценили $\hat{M}^*$.

Если число $\hat{M}^*$, то есть верхняя оценка максимального модуля четвертой производной (с учетом множителя $\frac{1}{90}$), завышено, требования к числу участков составной формулы, то есть числу m, также будут завышены.

3) Модель решения задачи:

Параметр $\varepsilon > 0$, предназначенный для контроля общей погрешности, делят на три положительные составляющие:

$$\varepsilon = \delta(b-a) + \varepsilon_{II} + (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \qquad (12.44)$$

Каждую составляющую (каждое слагаемое) используют для контроля своей части погрешности.

$\delta(b-a) > 0$	контролирует вычислительную погрешность, вызванную ошибками задания функции
$(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) > 0$	контролирует погрешность замены интеграла квадратурной формулой
$\varepsilon_{II} > 0$	«запас» («допуск») на то, что погрешность выполнения арифметических операций, оставаясь пренебрежимо малой для отдельной операции, накапливается по мере их выполнения.

С четвертым комментарием нужно просто ознакомиться:

4) В ходе решения задачи возникает предположение о том, что погрешность арифметических операций существует.

Способы оценки погрешности отдельных арифметических операций и вычисления значений функций есть в учебной литературе.

Чтобы работать с такими оценками, теоретический аппарат нужно дополнить.

Например, так: $\tilde{I}_{2,m} = \tilde{\tilde{I}}_{2,m} + (\tilde{I}_{2,m} - \tilde{\tilde{I}}_{2,m})$, где

$$\underbrace{\tilde{I}_{2,m}}_{\substack{\text{то, что получилось}\\ \text{при попытке}\\ \text{вычислить } I_{2,m}}} = \underbrace{\tilde{\tilde{I}}_{2,m}}_{\substack{\text{то, что должно было}\\ \text{получиться}\\ \text{без погрешности}\\ \text{арифметических}\\ \text{операций, но с ошибками}\\ \text{вычисления}\\ \text{функции в узлах}}} + \underbrace{(\tilde{I}_{2,m} - \tilde{\tilde{I}}_{2,m})}_{\substack{\text{влияние}\\ \text{погрешности}\\ \text{арифметических}\\ \text{операций}\\ \text{на результат}\\ \text{вычислений } \tilde{\tilde{I}}_{2,m}}}$$

Тогда вычислительная погрешность (как часть теоретического аппарата) остается прежней, но ее структура становится сложнее (см. схему ниже), а величина $\delta(b-a)$ контролирует только часть вычислительной погрешности:

$$\left| I_{2,m} - \tilde{\tilde{I}}_{2,m} \right| \le \delta(b-a)$$

$$\underbrace{B\Pi_{2,m} = I_{2,m} - \tilde{I}_{2,m}}_{\substack{\text{вычислительная погрешность} \\ \text{интегрирования: разность того,} \\ \text{что соответствует} \\ \text{квадратурной формуле,} \\ \text{и того, что получилось} \\ \text{при попытке ее вычислить}}} = I_{2,m} - (\tilde{\tilde{I}}_{2,m} + \tilde{I}_{2,m} - \tilde{\tilde{I}}_{2,m}) =$$

$$= \underbrace{(I_{2,m} - \tilde{\tilde{I}}_{2,m})}_{\substack{\text{погрешность, обусловленная} \\ \text{неточностью} \\ \text{исходных данных}}} + \underbrace{(\tilde{\tilde{I}}_{2,m} - \tilde{I}_{2,m})}_{\substack{\text{погрешность, обусловленная} \\ \text{неточной обработкой} \\ \text{поступивших (неточных)} \\ \text{данных}}}$$

12.4.5. Оценка погрешности интегрирования по правилу Рунге

Чтобы вычислить интеграл I с заданной точностью, нужно определить число участков составной формулы, то есть определить число m.

В случае составной формулы Симпсона для этого необходимо вычислить (оценить) максимум модуля четвертой производной подынтегральной функции.

В случае составной формулы порядка n потребуется производная порядка $n+1$ (для нечетных порядков) или $n+2$ (для четных порядков), что не всегда удобно.

Способ оценки погрешности по правилу Рунге не требует вычисления и (или) оценки производных.

Чтобы применить это правило, необходимо дважды вычислить интеграл по составной формуле на «обычной» и «удвоенной» сетке, и затем сравнить результаты.

При этом основная сетка составной формулы может быть неравномерной. Важно, чтобы при «удвоении» сетки каждый ее участок был поделен ровно пополам.

Утверждение 9. Пусть I – точное (истинное) значение интеграла (12.1).

Введем обозначения:

$I_{2,m}$ значение, соответствующее составной формуле Симпсона с числом участков m;

$I_{2,2m}$ значение, соответствующее составной формуле Симпсона с числом участков $2m$ («удвоение» исходной сетки)

$\psi_{2,m} = I - I_{2,m}$ погрешность составной формулы Симпсона с числом участков m.

Тогда

$$\psi_{2,m} = I - I_{2,m} \approx \frac{I_{2,2m} - I_{2,m}}{2^4 - 1} \cdot 2^4 \qquad (12.51)$$

Если для вычисления интеграла I используется составная формула Ньютона-Котеса порядка n с числом участков m и порядком погрешности k, то для оценки погрешности составной формулы справедливо аналогичное утверждение.

Утверждение 10. Пусть I – точное (истинное) значение интеграла (12.1).

Введем обозначения:

$I_{n,m}$ значение, соответствующее составной формуле Ньютона-Котеса порядка n с числом участков m;

$I_{n,2m}$ значение, соответствующее составной формуле Ньютона-Котеса порядка n с числом участков $2m$ («удвоение» исходной сетки)

$\psi_{n,m} = I - I_{n,m}$ погрешность составной формулы Ньютона-Котеса порядка n с числом участков m.

Тогда

$$\psi_{n,m} = I - I_{n,m} \approx \frac{I_{n,2m} - I_{n,m}}{2^{k-1} - 1} \cdot 2^{k-1} \tag{12.52}$$

где k – порядок погрешности формулы Ньютона-Котеса порядка n.

Комментарий

В случае составной формулы Симпсона $k = 5$, потому что погрешность базовой (не составной) формулы Симпсона имеет порядок $k = 5$.

Доказательство Утверждения 9

Пусть оценивается величина $\psi_{2,m}$ – погрешность составной формулы Симпсона с числом участков m.

Предположим, что на каждом участке **составной формулы**, а именно, на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, **погрешность базовой (квадратурной) формулы** достаточно точно описывается главным членом погрешности:

$$\psi_2[x_i, x_{i+1}] = -\frac{\hat{h}^5}{90} f^{IV}(x_i) + o(\hat{h}^5)$$

где $\hat{h} = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$ есть шаг формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$.

Покажем, как оценить $\psi_2[x_i, x_{i+1}]$.

На участке основной сетки значение интеграла вычислено по формуле

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

Значение, соответствующее квадратурной формуле, обозначим $I_2[x_i, x_{i+1}]$.

Для «истинного» значения интеграла на участке $[x_i, x_{i+1}]$ справедливо представление

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = I_2[x_i, x_{i+1}] + \psi_2[x_i, x_{i+1}]$$

Так как

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+0.5}} f(x)\,dx + \int\limits_{x_{i+0.5}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

для подсчета интеграла на участке $[x_i, x_{i+1}]$ можно применить формулу Симпсона отдельно на каждой половине участка, сохраняя прежние обозначения для узлов и шага формулы:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{\hat{h}}{2\cdot 3}(f_i + 4f_{i+1/4} + f_{i+1/2}) + \frac{\hat{h}}{2\cdot 3}(f_{i+1/2} + f_{i+3/4} + f_{i+1})$$

Значения, соответствующие квадратурным формулам на половинах участка, обозначим $I_2[x_i, x_{i+1/2}]$ и $I_2[x_{i+1/2}, x_i]$.

Погрешности квадратурных формул для половин участка $[x_i, x_{i+1}]$ **составят**

$$\psi_2[x_i, x_{i+1/2}] = -\frac{\hat{h}^5}{90\cdot 2^5} f^{IV}(x_i) + o(\hat{h}^5)$$

$$\psi_2[x_{i+1/2}, x_i] = -\frac{\hat{h}^5}{90\cdot 2^5} f^{IV}(x_{i+1/2}) + o(\hat{h}^5)$$

Используя формулу Тейлора и представление

$$f^{IV}(x_{i+1/2}) = f^{IV}(x_i) + O(\hat{h})$$

несложно показать, что

$$\psi_2[x_i, x_{i+1}] = -\frac{\hat{h}^5}{90\cdot 2^5} f^{IV}(x_i) + o(\hat{h}^5)$$

Таким образом, неизвестное «истинное» значение интеграла на участке $[x_i, x_{i+1}]$ **можно записать двумя способами:**

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = I_2[x_i, x_{i+1}] - \frac{\hat{h}^5}{90} f^{IV}(x_i) + o(\hat{h}^5)$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = I_2[x_i, x_{i+1/2}] + I_2[x_{i+1/2}, x_i] - 2\cdot\frac{\hat{h}^5}{90\cdot 2^5} f^{IV}(x_i) + o(\hat{h}^5)$$

где три значения, соответствующие трем обращениям к формуле Симпсона, известны.

Сумма значений квадратурных формул на половинах участка есть «новое» приближенное значение интеграла, соответствующего участку $[x_i, x_{i+1}]$:

$$I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] = I_2[x_i, x_{i+1/2}] + I_2[x_{i+1/2}, x_{i+1}]$$

Приравнивая правые части каждого равенства и «отбрасывая» (по правилу Рунге) бесконечно малые величины, получим приближенное равенство

$$I_2[x_i, x_{i+1}] - \frac{\hat{h}^5}{90} f^{IV}(x_i) \approx I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] - \frac{\hat{h}^5}{90 \cdot 2^4} f^{IV}(x_\mathrm{i})$$

Откуда следует

$$-\frac{\hat{h}^5}{90} f^{IV}(x_i) \approx \frac{I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] - I_2[x_i, x_{i+1}]}{2^4 - 1} \cdot 2^4$$

Так как в левой части приближенного равенства оказался главный член погрешности формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$, заменим его на саму погрешность

$$\psi_2[x_i, x_{i+1}] \approx \frac{I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] - I_2[x_i, x_{i+1}]}{2^4 - 1} \cdot 2^4$$

Таким образом, погрешность квадратурной формулы участке $[x_i, x_{i+1}]$ **можно оценить: правая часть приближенного равенства известна**. Такую оценку обеспечивают три обращения к квадратурной формуле: одно обращение на участке $[x_i, x_{i+1}]$ и два обращения на половинах данного участка.

Просуммируем полученные оценки по всем m участкам составной формулы:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \psi_2[x_i, x_{i+1}] \approx \frac{\sum\limits_{i=0}^{m-1}\left[I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] - I_2[x_i, x_{i+1}] \right]}{2^4 - 1} \cdot 2^4$$

Сумма значений квадратурных формул по участкам вида $[x_i, x_{i+1}], i = 0,\dots m-1$ является **значением составной формулы Симпсона с числом участков** m:

$$\sum_{i=0}^{m-1} I_2[x_i, x_{i+1}] = I_{2,m}$$

Сумма значений квадратурных формул, вычисленных на половинах участков $[x_i, x_{i+1}], i = 0,...m-1$, является **значением составной формулы Симпсона с числом участков** $2m$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] = I_{2,2m}$$

Сумма погрешностей квадратурных формул по участкам вида $[x_i, x_{i+1}], i = 0,...m-1$ является **погрешностью составной формулы Симпсона с числом участков** m:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \psi_2[x_i, x_{i+1}] = \psi_{2,m}$$

Таким образом, доказано представление

$$\psi_{2,m} \approx \frac{I_{2,2m} - I_{2,m}}{2^4 - 1} \cdot 2^4$$

В практике численных методов вместо знака приближенного равенства часто пишут равенство.

Пример

Метод адаптивной квадратуры

Метод адаптивной квадратуры позволяет приближенно вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{12.53}$$

с заданной точностью (ε) за счет оптимизации неравномерных сеток (m – финальное число участков сетки) с помощью различных составных квадратурных формул, построенных на базе формул Ньютона-Котеса различных порядков (n).

Рассмотрим метод на примере составной формулы Симпсона $I_{2,\,m}$. Сначала приведем свойства полученного решения, а затем – принципы его получения.

Свойства решения

1) При использовании метода адаптивной квадратуры интеграл I будет вычислен по составной квадратурной формуле Симпсона (порядок формулы $n = 2$) на неравномерной сетке отрезка $[a, b]$ с числом участков m по формуле

$$I_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\hat{h}_i}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}) \tag{12.54}$$

где

$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ есть границы участков $[x_i, x_{i+1}],\, i = 0,\ldots m-1$

$\hat{h}_i$ – «шаг формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$», $\hat{h}_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$;

$x_{i+1/2}$ – середина участка $[x_i, x_{i+1}]$.

С учетом вычислительной погрешности вместо $I_{2,\,m}$ будет получено $\tilde{I}_{2,\,m}$

2) Если шаги $\hat{h}_i,\, i = 0,\ldots m-1$ будут вычислены точно и при подсчете выражения (12.54) погрешность выполнения арифметических операций будет «исключена», вычислительная погрешность интегрирования $В\Pi_{2,\,m} = I_{2,\,m} - \tilde{I}_{2,\,m}$ будет ограничена:

$$\left| В\Pi_{2,\,m} \right| \le \delta \cdot (b - a)$$

Здесь $\delta > 0$ есть оценка погрешности задания функции $f(x)$ в основных и дополнительных узлах сетки.

3) По итогам работы метода погрешность $\psi_{2,m}$ составной формулы, то есть

$$\psi_{2,m} = I - I_{2,m}$$

составит

$$\psi_{2,m} = -\frac{1}{90} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV}(\xi_i) \cdot \hat{h}_i^5 ,$$

где $\hat{h}_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$ есть половина длины соответствующего участка и неизвестные средние точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...m$.

4) Число участков m и границы участков, то есть узлы $x_0 = a < x_1 < ...x_{m-1} < x_m = b$ заранее неизвестны (кроме пределов интегрирования $x_0 = a$ и $x_m = b$). Число участков и границы будут сформированы в ходе работы метода.

5) В рамках возможностей правила Рунге процедура построения сетки гарантирует, что погрешность $\psi_{2,m}$ составной формулы соответствует требованию

$$\left| \psi_{2,m} \right| = \left| \frac{1}{90} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV}(\xi_i) \cdot \hat{h}_i^5 \right| \le \varepsilon$$

где $\varepsilon > 0$ есть параметр метода.

6) Таким образом, интеграл I будет вычислен с общей погрешностью, не превышающей

$$\left| O\Pi_{2,\,m} \right| \le \delta \cdot (b - a) + \varepsilon$$

7) Выполнение требования

$$\left| \psi_{2,m} \right| \le \varepsilon$$

обеспечивается за счет того, что на участках с большими (по модулю) значениями $f^{IV}(x)$ сетка оказывается «густой» и участки интегрирования имеют малую длину, а на участках с малыми (по модулю) значениями $f^{IV}(x)$ сетка является «разреженной» и участки интегрирования могут быть длинными.

Принцип получения решения

1) Начальная сетка может быть задана равномерной. Пусть она содержит $m*$ участков, начальный и последний узел совпадают с пределами интегрирования: $x_0 = a$ и $x_m = b$, длина участка составляет

$$h = \frac{b - a}{m*}$$

Границами участков $[x_i, x_{i+1}]$ являются узлы $x_i = a + ih,\ i = 0,...m*$.

Если для контроля погрешности задан параметр $\varepsilon > 0$, для контроля погрешности на каждом участке начальной сетки по отдельности устанавливается параметр $\dfrac{\varepsilon}{m^*} > 0$.

Пример показан на рисунке 4.

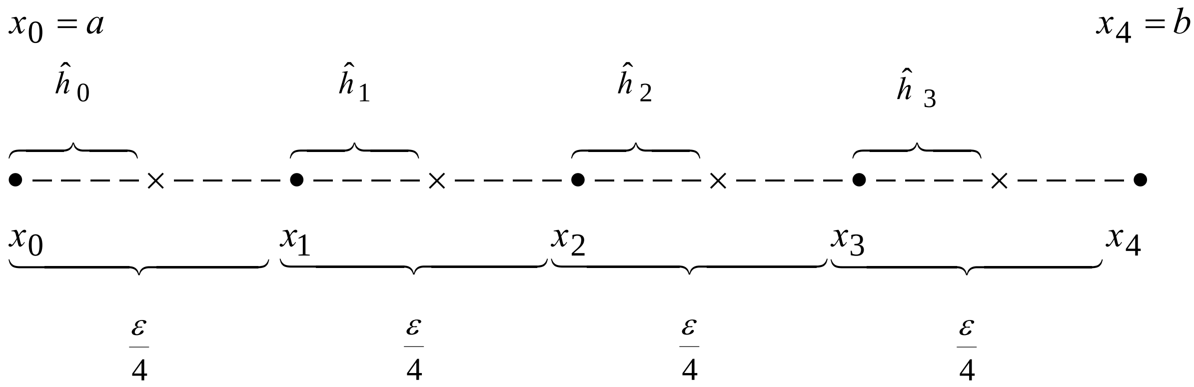


Рисунок 4

Пример начальной сетки метода адаптивной квадратуры: составная формула Симпсона, начальное число участков $m^* = 4$, параметр контроля погрешности $\varepsilon > 0$. Показаны основные и дополнительные узлы сетки, шаг формулы Симпсона на каждом участке и параметр контроля погрешности для каждого участка

2) Пусть интеграл вычисляется на участке $[x_i, x_{i+1}]$. Применим на этом участке формулу Симпсона:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

Результат обозначим через $I_2[x_i, x_{i+1}]$.

Затем применим эту же формулу на каждой половине участка:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{\hat{h}}{2\cdot 3}(f_i + 4f_{i+1/4} + f_{i+1/2}) + \frac{\hat{h}}{2\cdot 3}(f_{i+1/2} + f_{i+3/4} + f_{i+1})$$

Результат обозначим через $I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}]$

В соответствии с правилом Рунге для оценки погрешности формулы

используем величину $R_2[x_i, x_{i+1}]$, которую определим следующим образом:

$$R_2[x_i, x_{i+1}] = \frac{I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] - I_2[x_i, x_{i+1}]}{2^4 - 1} \cdot 2^4 =$$

$$= \frac{16}{15} \cdot [\, I_2^{нов}[x_i, x_{i+1}] - I_2[x_i, x_{i+1}]]$$

На каждом участке должен быть использован «свой» положительный параметр контроля погрешности, который зависит от длины участка.

Такой параметр для участка $[x_i, x_{i+1}]$ обозначим через $\varepsilon\,[x_i, x_{i+1}]$.

Если выполняется требование

$$\left| \, R_2[\, x_i,\, x_{i+1}] \right| \le \varepsilon\,[x_i, x_{i+1}] \qquad (12.55)$$

считаем, что «интеграл принят»: значение $I_2[x_i, x_{i+1}]$ пригодно для последующего использования.

Если

$$\left| \, R_2[\, x_i,\, x_{i+1}] \right| > \varepsilon\,[x_i, x_{i+1}]$$

участок $[x_i, x_{i+1}]$ должен быть поделен пополам и те же самые процедуры проведены на каждой его половине, причем на половине участка должен быть установлен контрольный параметр в 2 раза меньше прежнего:

$$\varepsilon\,[x_i, x_{i+1/2}] = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon[\, x_i,\, x_{i+1}],\ \varepsilon\,[x_{i+1/2}, x_{i+1}] = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon[\, x_i,\, x_{i+1}]$$

Деление отрезка есть локальное «удвоение» сетки. Число участков сетки в этот момент увеличивается и в рамках теоретического описания меняется индексация узлов.

3) Метод продолжает работу до тех пор, пока интегралы по всем участкам не будут приняты. Искомый интеграл вычисляется суммированием тех интегралов, которые «приняты».

В рамках описанной выше процедуры

на участках длины $\dfrac{b-a}{m*}$ используется параметр $\dfrac{\varepsilon}{m*}$

на участках длины $\dfrac{b-a}{2m*}$ используется параметр $\dfrac{\varepsilon}{2m*}$

на участках длины $\dfrac{b-a}{2^S m*}$ используется параметр $\dfrac{\varepsilon}{2^S m*}$.

Поэтому сумма длин участков равна длине отрезка интегрирования, а сумма контрольных параметров равна контрольному параметру метода.

Пример показан на рисунке 5.

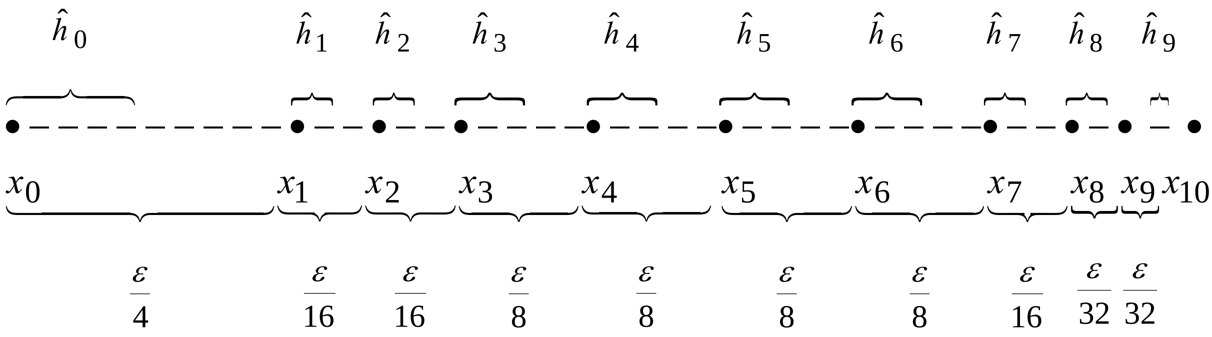


Рисунок 5

Пример финальной сетки метода адаптивной квадратуры: составная формула Симпсона, финальное число участков $m = 10$.

Показаны основные узлы сетки, шаг формулы Симпсона на каждом участке и параметр контроля погрешности для каждого участка.

Комментарии к рисунку

По завершении работы метода интеграл на отрезке $[a,b]$ вычислен на неравномерной сетке с числом участков $m = 10$ и параметром контроля $\varepsilon > 0$ по формуле

$$I_{2,10} = \sum_{i=0}^{9} \frac{\hat{h}_i}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1})$$

Вычисление велось поэтапно, по мере формирования сетки. На финальной сетке:

1 участок исходной длины $\frac{b-a}{4}$ с параметром контроля погрешности $\frac{\varepsilon}{4}$

4 участка длины $\frac{b-a}{8}$ с параметром контроля погрешности $\frac{\varepsilon}{8}$

3 участка длины $\frac{b-a}{16}$ с параметром контроля погрешности $\frac{\varepsilon}{16}$

2 участка длины $\frac{b-a}{32}$ с параметром контроля погрешности $\frac{\varepsilon}{32}$

Сумма длин участков равна длине отрезка интегрирования:

$$(b-a)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 3+\frac{1}{32}\cdot 2\right)=b-a$$

Сумма контрольных параметров равна контрольному параметру метода:

$$\varepsilon\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 3+\frac{1}{32}\cdot 2\right)=\varepsilon$$

4) Приведем обоснование метода.

Запишем погрешность формулы Симпсона на участке $[x_i, x_{i+1}]$, имеющем длину

$$\frac{b-a}{2^S m*}.$$

Она равна

$$-\frac{\hat{h}_i^5}{90} f^{IV}(\xi_i),$$

где $\hat{h}_i$ есть шаг формулы Симпсона, то есть половина длины участка: $\hat{h}_i = \dfrac{b-a}{2^{S+1} m*}$

На участке указанной выше длины погрешность формулы составит

$$-\left(\frac{b-a}{2^{S+1} m*}\right)^5 \frac{1}{90} f^{IV}(\xi_i) \sim O\left(\frac{1}{2^{5S}}\right)$$

Для контроля погрешности используется величина

$$\frac{\varepsilon}{2^S m*} \sim O\left(\frac{1}{2^S}\right).$$

При $S \to \infty$ погрешность формулы стремится к нулю быстрее, чем параметр контроля погрешности, и если подынтегральная функция является достаточно гладкой, на участке достаточно малой длины условие (12.55) будет выполнено.

Когда на всех участках отрезка $[a, b]$ условие на погрешность (12.55), согласованное с длинами участков, будет выполнено, приближенное значение интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

будет получено суммированием:

$$\tilde{I}_{2,m} = \sum_{i=0}^{m-1} I_2[x_i, x_{i+1}], \; x_0 = a, \; x_m = b$$

При этом погрешность составной формулы не превысит заданную:

$$|I - I_{2,m}| \le \varepsilon.$$

5) Для программной реализации метода можно использовать рекурсию.

Модуль 12.4 – Практикум по теме «Численное интегрирование и анализ погрешности»

Пример 1

Значения функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ представлены в таблице

с погрешностью не более половины единицы последнего разряда:

x_i	0.040	0.060	0.080	0.100	0.120	0.140	0.160
$\tilde{f}_i$	0.398623	0.398225	0.397668	0.396953	0.396080	0.395052	0.393868

Аргумент табулирован с шагом 0.004, но в этом фрагменте таблицы аргумент представлен от $x = 0.040$ до $x = 0.160$ с шагом 0.02.

Нужно вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_{0.040}^{0.160} f(x)\, dx\,,$$

используя **квадратурную формулу второго порядка** I_2 (Симпсона) и затем **составную квадратурную формулу** $I_{2,\,m}$ (Симпсона).

Провести анализ погрешности.

Сравнить результаты.

Решение

Поскольку $f(x)$ представлена с ошибками, в таблице указан символ $\tilde{f}_i$. По условию задачи погрешность задания функции в узлах сетки не превышает $\delta = 0.5 \cdot 10^{-6}$.

При любом способе применения формулы Симпсона (базовый вариант, составная формула, равномерная или неравномерная сетка) вычислительная погрешность численного интегрирования оценивается величиной

$$\delta \cdot (b - a) = 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot (0.160 - 0.040) = 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-2} = 0.6 \cdot 10^{-7}$$

где $a = 0.040,\ b = 0.160$ –- пределы интегрирования.

Поэтому при любом способе применения формулы общая погрешность интегрирования будет оценена величиной не менее $0.6 \cdot 10^{-7}$.

Для оценок **погрешности интегрирования** по формуле Симпсона будет нужна величина

$$\max_{x \in [0.040,\ 0.160]} \left| f^{IV}(x) \right| = 1.192044$$

Ее значение приведено с погрешностью не более половины единицы последнего разряда по справочному изданию, поэтому правильно использовать оценку

$$\max_{x \in [0.040,\ 0.160]} \left| f^{IV}(x) \right| \le 1.192044 + 0.5 \cdot 10^{-6}$$

Решая «свои» задачи, для получения таких оценок можно использовать справочные издания или on-line сервис, а в приложениях (напомним) используют таблицы конечных или разделенных разностей.

Часть I

Для вычисления интеграла I используем формулу I_2 (Симпсона) на отрезке $[a, b] = [0.040; 0.160]$.

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_2$$

$$I_2 = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

где $h = \dfrac{b-a}{2}$ есть «шаг формулы Симпсона».

Таким образом, из таблицы значений функции нужно взять 3 узла: пределы интегрирования $a = 0.040, b = 0.160$ и середину отрезка $[a, b]$:

$$\frac{a+b}{2} = 0.100$$

Шагом формулы (число h) является половина отрезка интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{2} = 0.06$$

Формулу запишем в виде

$$I_2 = \frac{0.06}{3}\left(f(0.040) + 4 \cdot f(0.100) + f(0.160)\right).$$

По табличным данным (они содержат погрешность) вычислим

$$\tilde{I}_2 = \frac{0.06}{3}(0.398623 + 4 \cdot 0.396953 + 0.393868) = 0.04760606$$

Приближенное значение I составит

$$I = \int_{0.040}^{0.160} f(x)\,dx \approx 0.04760606$$

Ход рассуждений можно сразу «отмечать» в таблице:

x_i	**0.040**	0.060	0.080	**0.100**	0.120	0.140	0.160
$\tilde{f}_i$	**0.398623**	0.398225	0.397668	**0.396953**	0.396080	0.395052	0.393868
	Отрезок интегрирования						
	Шаг формулы			Шаг формулы			

Исследуем погрешность интегрирования

$$\psi_2 = I - I_2$$

Для погрешности формулы Симпсона верна оценка

$$|\psi_2| \le \hat{M}\, h^5,$$

где

$$\hat{M} = \frac{1}{90} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|,$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$ есть шаг формулы Симпсона.

В данной задаче

$$|\psi_2| \le \hat{M}\,(0.06)^5,$$

где $\hat{M} = \frac{1}{90} \max_{x \in [0.040,\, 0.160]} \left| f^{IV}(x) \right| = \frac{1}{90} \cdot 1.1920445 = 0.013244939$

Таким образом,

$$| \psi_2 | \le \hat{M} \ (0.06)^5 = 0.102992645 \cdot 10^{-7}$$

Исследуем общую погрешность интегрирования

$$O\Pi_2 = I - \tilde{I}_2$$

Для общей погрешности формулы Симпсона выполняется

$$\left| O\Pi_2 \right| \le \hat{M} h^5 + \delta(b-a)$$

В данной задаче

$$\left| O\Pi_2 \right| \le 0.102992654 \cdot 10^{-7} + 0.6 \cdot 10^{-7} = 0.702992645 \cdot 10^{-7}$$

Выводы:

1) Оценка погрешности интегрирования имеет такой же порядок (-7), что и оценка вычислительной погрешности интегрирования (-7).

Решение не учитывать сквозную табуляцию с шагом 0.004 и затем «пропустить» еще 4 узла оправдано, потому что оценка погрешности формулы Симпсона

$$| \psi_2 | \le 0.102992645 \cdot 10^{-7}$$

меньше и лучше, чем оценка вычислительной погрешности, инициированной погрешностью данных:

$$\left| B\Pi_2 \right| \le 0.6 \cdot 10^{-7}$$

2) Общая погрешность интегрирования отражает рост погрешности:

$$\left| O\Pi_2 \right| \le 0.702992645 \cdot 10^{-7}$$

3) Приближенное значение интеграла

$$I = \int_{0.040}^{0.160} f(x)\, dx \approx 0.04760606$$

Часть II

Для вычисления интеграла I используем составную формулу $I_{2,\ m}$ (Симпсона) на отрезке $[a, b] = [0.040; 0.160]$.

Из таблицы видно, что формулу можно применить на 3-х участках равной длины, поэтому $m = 3$, длина участка $h = 0.040$, шаг формулы на участке $\hat{h} = 0.020$

x_i	**0.040**	0.060	**0.080**	**0.100**	**0.120**	0.140	0.160
$\tilde{f}_i$	**0.398623**	0.398225	**0.397668**	**0.396953**	**0.396080**	0.395052	0.393868

Отрезок интегрирования					
Участок 1		Участок 2		Участок 3	
Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы	Шаг формулы

Составная формула $I_{2,\ m}$ служит для приближенного вычисления интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_{2,\ m}$$

При $m = 3$ на равномерной сетке записывается в виде

$$I_{2,3} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\hat{h}}{3}(f_i + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}) \ ,$$

где $\hat{h} = \dfrac{b-a}{2 \cdot 3}$.

Основными узлами составной формулы и границами ее участков в данной задаче будут

$$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.080,\ x_2 = 0.120,\ x_3 = b = 0.160$$

Участки имеют вид:

$$[x_0, x_1] = [0.040; 0.080]$$

$$[x_1, x_2] = [0.080; 0.120]$$

$$[x_2, x_3] = [0.120; 0.160]$$

Дополнительными узлами (они нужны для применения трехточечной формулы на каждом участке), будут

$$x_{1/2} = 0.060,\ x_{3/2} = 0.100,\ x_{5/2} = 0.140$$

Проверим, соответствует ли значение $\hat{h} = 0.020$, столь очевидное при рассмотрении таблицы, формулам, указанным в описании метода:

$$\hat{h} = \frac{b-a}{2 \cdot 3} = \frac{0.160 - 0.040}{6} = \frac{0.120}{6} = 0.02$$

(соответствует).

Составную формулу $I_{2,3}$ запишем в виде

$$I_{2,3} = \frac{0.02}{3}\{\underbrace{(f(0.040) + 4 \cdot f(0.060) + f(0.080))}_{\text{на участке } 1} +$$
$$+ \underbrace{(f(0.080) + 4 \cdot f(0.100) + f(0.120)}_{\text{на участке } 2} + \ .$$
$$+ \underbrace{(f(0.120) + 4 \cdot f(0.140) + f(0.160)}_{\text{на участке } 3}\}$$

По табличным данным (они содержат погрешность) вычислим

$$\tilde{I}_{2,3} = \frac{0.02}{3}\{\ 0.398623 + 4 \cdot 0.398225 + 2 \cdot 0.397668 + 4 \cdot 0.396953 +$$
$$+ 2 \cdot 0.396080 + 4 \cdot 0.395052 + 0.393868\,\} = 0.047606046667$$

Приближенное значение I составит

$$I = \int\limits_{0.040}^{0.160} f(x)\, dx \approx 0.047606046667$$

Исследуем погрешность интегрирования

$$\psi_{2,m} = I - I_{2,m}$$

Для погрешности составной формулы Симпсона на равномерной сетке верна оценка

$$\left| \psi_{2,m} \right| \le m \cdot \hat{M}\ \hat{h}^5,$$

где m - число участков,

$$\hat{M} = \frac{1}{90} \max_{x \in [a, b]} \left| f^{IV}(x) \right|,$$

$\hat{h} = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$ есть шаг формулы на участке равномерной сетки.

В данной задаче

$$\left| \psi_{2,3} \right| \le 3 \cdot \hat{M} \ (0.02)^5,$$

где $\hat{M} = \dfrac{1}{90} \max\limits_{x \in [0.040,\, 0.160]} \left| f^{IV}(x) \right| = \dfrac{1}{90} \cdot 1.1920445 = 0.013244939$

Оценка погрешности составной формулы такова

$$\left| \psi_{2,3} \right| \le 3 \cdot \hat{M} \ (0.02)^5 = 0.12751413 \cdot 10^{-9}$$

Исследуем общую погрешность составной формулы

$$О\Pi_{2,m} = I - \tilde{I}_{2,m}$$

Для общей погрешности составной формулы Симпсона на равномерной сетке верно

$$\left| О\Pi_{2,m} \right| \le m \cdot \hat{M} \cdot \hat{h}^5 + \delta(b-a)$$

В данной задаче

$$\left| О\Pi_{2,\,3} \right| \le 0.12751413 \cdot 10^{-9} + 0.6 \cdot 10^{-7} = 0.601271514 \cdot 10^{-7}$$

Выводы:

1) Оценка погрешности интегрирования на два порядка лучше (-9), чем оценка вычислительной погрешности интегрирования (-7).

$$\left| \psi_{2,3} \right| \le 0.12751413 \cdot 10^{-9}$$

$$\left| В\Pi_{2,3} \right| \le 0.6 \cdot 10^{-7}$$

2) Общая погрешность интегрирования практически не отражает рост погрешности, потому что в ее структуре погрешность численного интегрирования практически не видна:

$$\left| О\Pi_{2,\,3} \right| \le 0.601271514 \cdot 10^{-7}$$

3) Приближенное значение интеграла

$$I = \int\limits_{0.040}^{0.160} f(x)\, dx \approx 0.047606046667$$

Сопоставление решений:

1) Оба решения по-своему корректны: первое решение имеет погрешность интегрирования, сопоставимую порядком с вычислительной погрешностью, второе – погрешность интегрирования на 2 порядка меньше, чем вычислительная погрешность.

2) Оба решения с вычислительной точки зрения экономичны, но решение с более низкой (лучшей) оценкой погрешности требует немного больше вычислений.

3) Оба решения подтверждают, что для вычисления искомого интеграла I в силу неточности исходных данных сквозная табуляция с шагом 0.004 не нужна.

4) На основе оценок общей погрешности для искомого значения интеграла I в каждом случае может быть построена интервальная оценка (как это делали в модуле 12.2) или уточненная интервальная оценка с учетом знака погрешностей $\psi_2, \psi_{2,\,m}$

На Рисунке 1 показаны маркером табличные данные.

На рисунке А) показан полином $\widetilde{P}_2(x)$, интерполирующий данные по 3-м узлам:

$$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = b = 0.160$$

По формуле Симпсона интеграл от $\widetilde{P}_2(x)$ принимается за приближенное значение интеграла от функции $f(x)$.

На рисунке Б) показаны три полинома степени 2 для составной формулы Симпсона, и каждый из них интерполирует данные по 3-м узлам своего участка:

$\widetilde{P}_{2,1}(x)$ для участка $[x_0,\, x_1]$: узлы $x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.080$, $x_{1/2} = 0.060$;

$\widetilde{P}_{2,\,2}(x)$ для участка $[x_1,\, x_2]$: узлы $x_1 = 0.080,\ x_2 = 0.120$, $x_{3/2} = 0.100$;

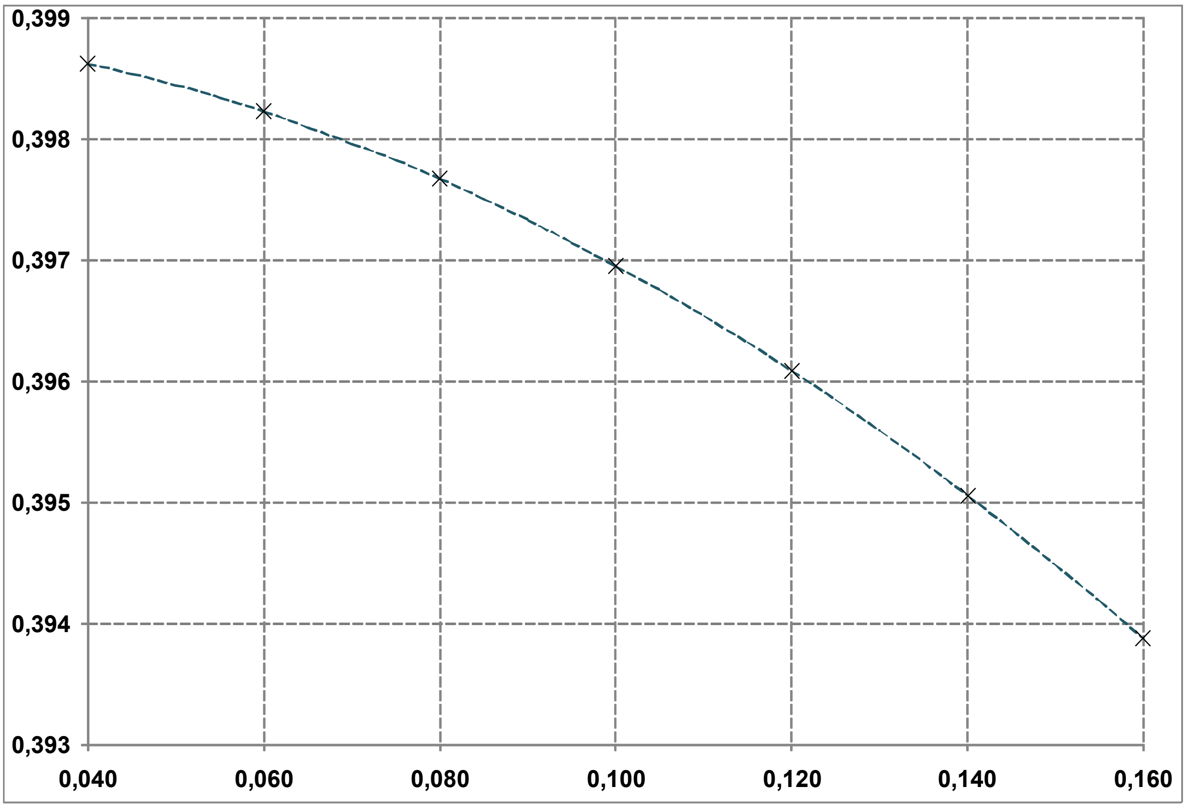
$\widetilde{P}_{2,\,3}(x)$ для участка $[x_2\,,\, x_3]$: узлы $x_2 = 0.120,\ x_3 = b = 0.160$, $x_{5/2} = 0.140$.

По составной формуле Симпсона сумма интегралов указанных полиномов (каждый интегрируется на своем участке) принимается за приближенное значение интеграла от функции.

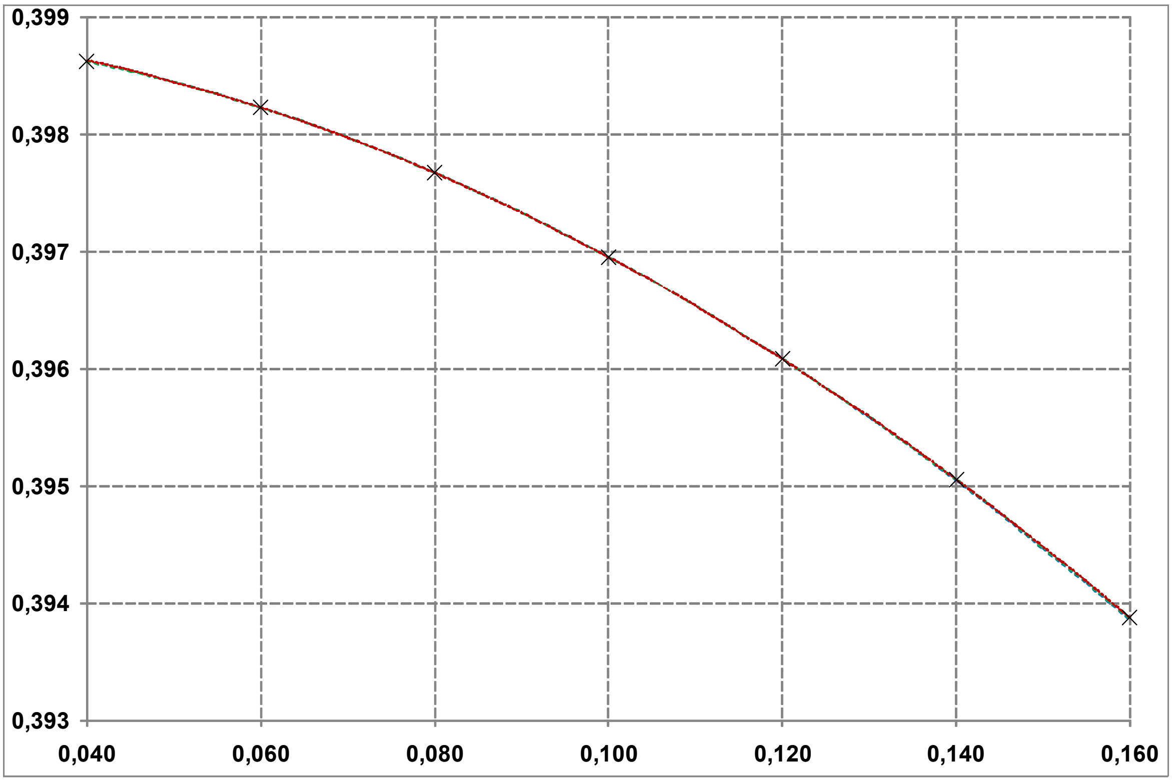
Визуально в силу сходства с функцией все 4 полинома не различимы. Как показывает Рисунок 2, различия полиномов имеют 5-й или 6-й порядок.

Этим объясняется качество и сходство полученных решений.

Значения функции и ее производных приведены по справочному изданию: Таблицы математической статистики. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. М.: Наука, 1983.



А)



Б)

Рисунок 1

На графике маркером показаны табличные данные. На рисунке А) показан интерполяционный полином степени 2 формулы Симпсона (построен по 3 узлам). На рисунке Б) – три интерполяционных полинома степени 2 составной формулы Симпсона (каждый построен по 3-м узлам своего участка). Визуально в силу сходства с функцией полиномы не различимы. Это объясняет качество и сходство полученных решений.

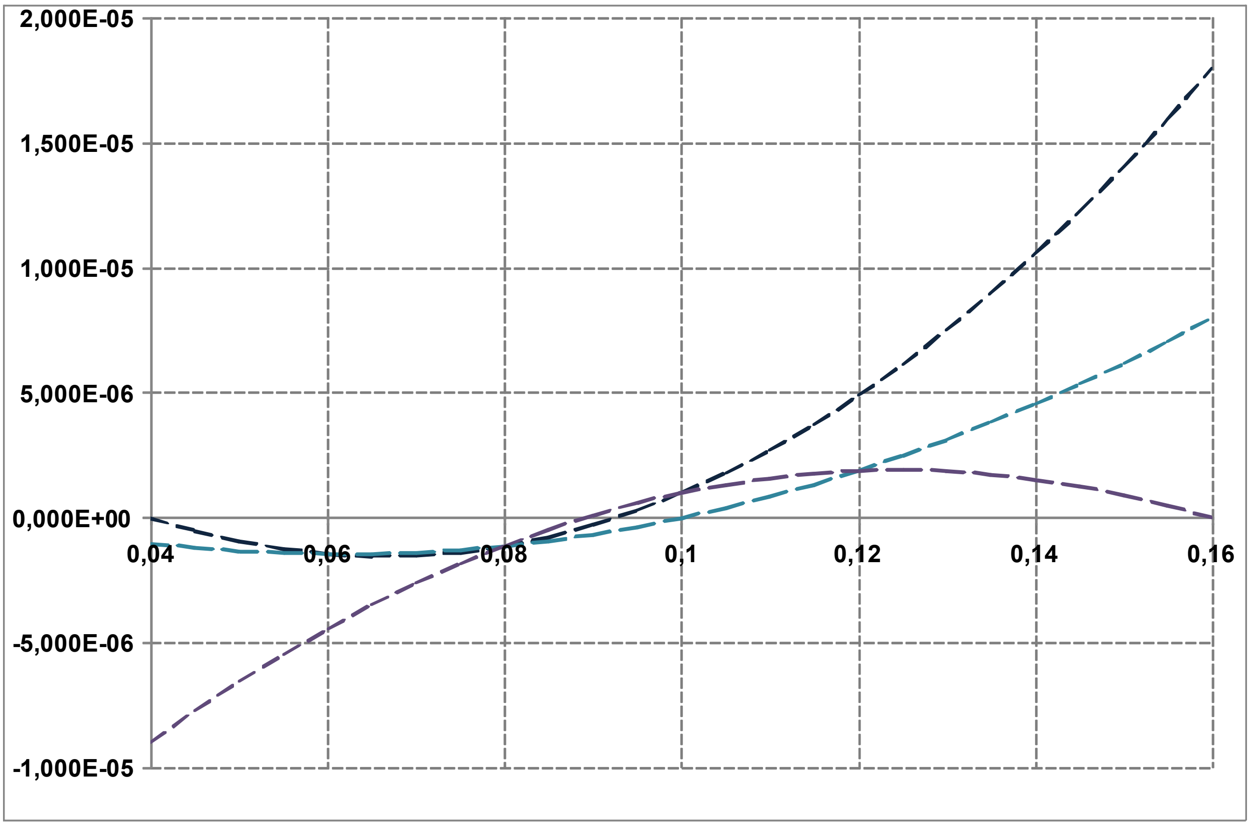


Рисунок 2

На рисунке показана разность интерполяционного полинома $\widetilde{P}_2(x)$ степени 2 формулы Симпсона, построенного по 3-м узлам:

$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = b = 0.160$

и каждого из трех интерполяционных полиномов степени 2 составной формулы Симпсона:

$\widetilde{P}_{2,1}(x)$ для участка $[x_0,\ x_1]$: узлы $x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.080$, $x_{1/2} = 0.060$;

$\widetilde{P}_{2,\,2}(x)$ для участка $[x_1,\ x_2]$: узлы $x_1 = 0.080,\ x_2 = 0.120$, $x_{3/2} = 0.100$;

$\widetilde{P}_{2,\,3}(x)$ для участка $[x_2,\ x_3]$: узлы $x_2 = 0.120,\ x_3 = b = 0.160$, $x_{5/2} = 0.140$.

(каждый построен по 3-м узлам своего участка).

Полином $\widetilde{P}_2(x)$ с каждым из полиномов $\widetilde{P}_{2,1}(x)$, $\widetilde{P}_{2,\,2}(x)$, $\widetilde{P}_{2,\,3}(x)$ в одном из **своих** узлов интерполяции

$x_0 = a = 0.040,\ x_1 = 0.100,\ x_2 = b = 0.160$

естественно, совпадает.

Различия полиномов (на участках их применения) имеют 5-й или 6-й порядок. Это объясняет сходство полученных решений.

ЛИТЕРАТУРА

а) литература по тематическому блоку

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 2001. – 383 с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963. – 660 с.
4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1967. – 500 с.
5. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы: использование MatLab. М.: Вильямс, 2001.
6. Неймарк Ю.И. Приближение и вычисление операторов дифференцирования и интегрирования для функций одного переменного. Лекция III. - Горький: Горьковский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 1965. – 22 с.
7. Самарский А.А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов. – Изд. 5-е, стер. – Сер. Классическая учебная литература по математике. – СПб: Лань, 2009. – 288 с.
8. Хэмминг Р.В. Численные методы. М.: Наука, 1968. – 400 с.
9. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 8. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 831Е.14.08.
10. Перов А.А., Протогенов А.П. Численные методы в физических исследованиях. – Н. Новгород: Нижегородский университет, 2019. – 69 с.

б) литература об организации учебного процесса по дисциплине

11. Садовничий В.А. Международный форум «Университеты, общество и будущее человечества». Доклад ректора МГУ имени М.В. Ломоносова академика В.А. Садовничего на Международном форуме «Университеты, общество и будущее человечества» 25 марта 2019 года. М.: Издательство Московского университета, 2019. – 36 с.
12. Высокопроизводительные параллельные вычисления. 100 заданий для расширенного лабораторного практикума. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 248 с.
13. Программы дисциплин по направлению «Прикладная математика и информатика». Учебно-методическое объединение Университетов. Учебно-методический совет по прикладной математике и информатике. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2002. С. 59 – 62.
14. Стронгина Н.Р. Цифровизация и качество обучения на примере фундаментальной дисциплины «Численные методы» // Научные вести. 2021. №2 (31). – С. 85 – 103.

Наталья Романовна **Стронгина**

КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»
Численное интегрирование и анализ погрешности
(Модуль 12.4)

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.